

УДК 517.9

**О.А. Бойко**

*старший преподаватель  
Новосибирского государственного  
архитектурно-строительного университета*

**Н.В. Комиссарова**

*старший преподаватель Сибирской  
государственной геодезической академии*

**О.Н. Чащин**

*доцент Сибирского университета  
потребительской кооперации*

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ СВОЙСТВ ЗДАНИЙ И СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

В статье рассматривается математическая модель на основе приложения обратных задач для уравнений параболического типа к расчету теплопереноса в стеновых конструкциях при проектировании зданий. Приведено численное решение задачи планирования эксперимента.

Ключевые слова: математическая модель, теплоперенос, планирование, строительство, строительные материалы.

*Введение.* Развитие современных строительных технологий, направленных на оптимизацию стоимости строительства с учетом последних требований СНиП по параметрам тепловой защиты, приводит к необходимости решения задачи проектировании теплозащитных свойств как строительных материалов, так и зданий и сооружений, построенных по современным строительным технологиям.

Энергосберегающие методы и автоматизированные технологии энергосбережения при эксплуатации жилых и промышленных зданий требуют постоянного мониторинга теплового режима здания. Для эффективного управления режимом отопления здания с учетом изменения внешних температурных условий необходимо уже на стадии проектирования провести математическое моделирование, сделать выбор

строительных материалов (или спроектировать их), при необходимости дать точные указания для изготовления форм при производстве блоков для малоэтажного строительства.

В настоящее время достаточно распространенным способом экономичного строительства офисных и производственных зданий является возведение металлического каркаса, несущего нагрузку, стены здания исполняются из строительного кирпича небольшой мощности, обычно в один кирпич. Затем, после выполнения общестроительных работ, осуществляется теплоизоляция современными строительными теплозащитными материалами. Принципиальная схема наружной стены промышленного или офисного здания, возведенного по современным строительным технологиям, приведена на рис. 1. На рис. 2 показана стена малоэтажного жилого дома, построенного с применением слоистых строительных материалов. Здесь  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  – теплоемкости слоев;  $d_1, d_2, d_3$  – их толщина.

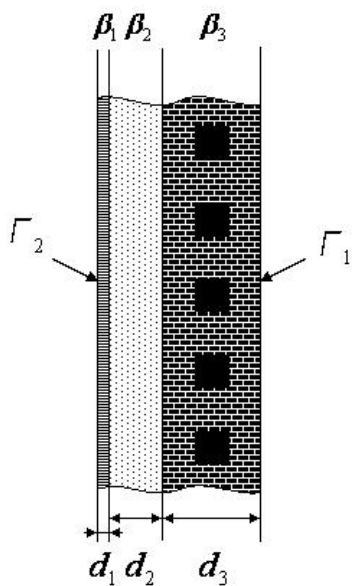


Рис. 1. Стена с металлическим каркасом

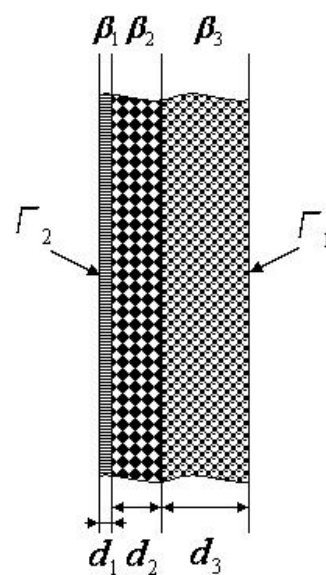


Рис. 2. Стена малоэтажного здания

Мощность теплоизолирующего слоя необходимо определить, исходя из его параметров (точнее теплопроводящих свойств материалов) и норм СНиП по параметрам теплозащиты зданий, а также предполагаемого теплового режима объекта в реальных климатических условиях, и заложить в технологическую и сметную документацию.

Для массового экономичного строительства жилых зданий, особенно при малоэтажном и индивидуальном строительстве, применяются слоистые строительные материалы, сочетающие достаточную механическую прочность и хорошие теплозащитные свойства [1, 2].

Математическое моделирование процессов распространения тепла приводит к обратным задачам для уравнений параболического типа [3, 4, 5]. Такие задачи являются сильно некорректными в классификации М.М. Лаврентьева [6]. Существование решения некорректной задачи устанавливается исследованием соответствующего операторного уравнения первого рода либо постулируется из физических условий протекания моделируемого процесса [7]. Доказательство единственности решения и получение оценок устойчивости – ключевой аспект исследования обратной задачи и проводится при ограничениях на класс функций, к которому принадлежит решение [3 – 6]. При этом используется априорная информация. Основным методом решения является метод регуляризации А.Н. Тихонова [3, 5].

Обратным задачам для уравнения теплопроводности, состоящим в определении коэффициентов, моделирующих теплопроводящие свойства среды, посвящено большое количество исследований, в частности в постановках, близких к исследуемым в данной статье, они рассмотрены в работах [8, 11].

Статьи [10, 11] исследуют задачу мониторинга теплового процесса, которая решается методом планирования эксперимента, а по постановке достаточно адекватно соответствует описанию мониторинга тепловых процессов эксплуатируемых зданий.

В обратных задачах теплопереноса, связанных со сферой строительства и проектирования строительных материалов, актуальной становится задача определения геометрии среды, т. е. с учетом нормативных ограничений и данных о свойствах материалов найти мощность слоев, определяющих прочность и теплозащитные свойства сооружения. Задачи такого типа приводят к решению операторных уравнений первого рода с монотонным (антимонотонным) оператором.

*Математическая постановка.* Рассмотрим традиционную обратную коэффициентную задачу теплообмена в слоистой среде  $\Omega = (0; a) \times (0; b) \times (0; c)$ , состоящей из  $n$  слоев. Требуется по известным  $m$  нестационарным измерениям температуры внутри тела определить коэффициенты теплопроводности слоистой среды. При этом ширина слоев, начальное распределение температуры, распределение источника тепла по времени и по пространству, а также остальные теплофизические характеристики среды считаются заданными.

Определим математическую модель процесса теплообмена:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\beta \operatorname{grad} T) = F(\Omega, t) \quad (1)$$

в трехмерной области  $\Omega$  переменных  $x, y, z$ , при изменении времени от  $t_1$  до  $t_2$ . Считаем  $t_1 = 0$ .

Начальное и краевые условия задаются в виде:

$$T_{t=0} = T_0(x, y, z), \quad (2)$$

$$T = \tilde{T}(t) \text{ на } \Gamma_1, \quad (3)$$

$$\beta \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_2, \quad (4)$$

где  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  – части границы области  $\Omega$ .

Уточним, что при расчете теплозащитных свойств стены здания, координаты  $x$  и  $y$  направлены по простирацию стены, а координата  $z$  – внутрь стены, перпендикулярно к ее плоскости; начало системы координат находится на внутренней поверхности стены  $\Gamma_1$ , а  $\Gamma_2$  – наружная поверхность стены (такая постановка соответствует бесконечной протяженности стены по переменным  $x$  и  $y$ , что при обычном соотношении протяженности и толщины стены представляется вполне естественным предположением).

В краевых условиях (3) и (4) температура  $T$  на  $\Gamma_1$  предполагается регулируемой в соответствии с технологическими или бытовыми условиями (чаще всего – постоянной), а поток тепла  $\frac{\partial T}{\partial n}$  пропорционален разности температуры на внешней поверхности стены  $\Gamma_2$  (определяемой переносом тепла по объему стены) и температуры наружного воздуха.

Распределенный внутренний тепловой источник  $F$  обусловлен наличием в стене инженерных коммуникаций, выделяющих или

поглощающих тепло, и (или) наличием источников тепла, расположенных в непосредственной близости от внутренней поверхности стены или вмонтированных непосредственно в стену. Влияние металлического каркаса на тепловой режим здания может быть учтено в функции  $F$  либо включено непосредственно в расчетные формулы (введено в коэффициент теплопроводности  $\beta$  со своим значением). В обычных условиях полагают  $F = 0$ .

Стена современного здания имеет слоистую структуру, которая обусловлена слоистыми строительными материалами и современной технологией строительства.

Коэффициент теплопроводности  $\beta$  зависит от координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  в пределах объема стены. Но, учитывая слоистую структуру стеновых материалов, а также то, что коэффициенты теплопроводности прочностного и теплоизолирующего слоев различаются в несколько раз, а теплопроводность стальных деталей каркаса на два порядка выше теплопроводности ячеистых бетонов и строительного кирпича, можно считать, что в пределах одного слоя (точнее теплоизолирующего слоя), теплозащитные свойства материала однородны. Такая априорная информация о коэффициенте  $\beta$  (решении обратной задачи), упрощает постановку и позволяет построить устойчивый алгоритм решения.

В уравнении (1)  $\beta$  – неизвестный коэффициент теплопроводности,  $F$  – внутренний тепловой источник,  $\rho C$  – коэффициент объемной теплоемкости с плотностью  $\rho$ . Все эти величины зависят от пространственных переменных с оговоренными выше естественными упрощениями.

Обозначим математическую модель (1) – (4) следующим образом:

$$AT = F. \quad (5)$$

Здесь  $A$  – оператор преобразования температурного поля  $T$ , определяемый условиями (1) – (4),  $F$  – результат преобразования по формулам (1) – (4), теоретическое поле температур.

Модель наблюдения имеет вид:

$$T^* = F[\beta] + \varepsilon, \quad (6)$$

где  $F[\beta] = F$  – оператор моделирования прямой задачи при заданных значениях  $\beta$  (при известных коэффициентах теплопроводности каждого из

слов,  $T^*$  – измеряемая величина,  $\varepsilon$  – шум измерений; будем предполагать, что шум измерения удовлетворяет условиям нормального распределения (Гауссов шум).

*Решение задачи восстановления коэффициента теплопроводности.* Для получения единственного решения обратной задачи восстановления неизвестных коэффициентов, точнее векторов  $\beta$ , по наблюдениям (6) можно использовать метод минимизации функционала Тихонова [3]:

$$I(T, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (QT - T^*)^T (QT - T^*) dt + \frac{\alpha}{2} \|\beta - \beta^r\|^2, \quad (7)$$

где верхний символ  $T$  стандартно обозначает операцию транспонирования.

Преобразуем формулу (7), при которой решение  $T$  не обязательно некоторая явная функция от неизвестных параметров  $\beta$ , которую можно записать с помощью множителей Лагранжа [20]:

$$L(T, \beta, \lambda) = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (QT(t) - T^*(t))^T (QT(t) - T^*(t)) dt + \frac{\alpha}{2} \|\beta - \beta^r\|^2 + \lambda^T \int_0^{t_1} (A(\beta)T(t) - f) dt, \quad (8)$$

где  $\lambda$  – вектор множителей Лагранжа.

Для минимизации функционала (7) воспользуемся методом Флетчера – Ривса [14], который является вариацией метода сопряженных градиентов. Достоинством метода является его сходимость за  $(N+1)$  шаг для квадратичной функции, где  $N$  – размерность задачи. Среди недостатков следует отметить, что стационарное состояние наступает при высоком уровне невязки и, кроме того, имеет место неустойчивость циклического типа. Однако методам первого порядка отдается предпочтение из-за их сходимости за малое число итераций.

Первоначально определим направление антиградиента, которое на нулевом шаге соответствует направлению спуска:

$$d^{(0)} = - \left\{ \frac{\partial I}{\partial \beta} \right\} = - \int_0^{t_1} \left( Q \frac{\partial T}{\partial \beta} \right)^T (QT - T^*) dt - \alpha \|\beta - \beta^r\|, \quad (9)$$

где  $\left[\frac{\partial T(\beta)}{\partial \beta}\right]$  – функция чувствительности к возмущениям параметра  $\beta$ .

На первом шаге определяется оптимальный шаг по направлению  $d$ . Для этого рассмотрим функционал  $I(\beta + \alpha d)$ , разложив оператор  $T(\beta + \alpha d)$  в ряд Тейлора по переменной  $d$ , отбросив слагаемые старше второго порядка:

$$T(\beta + \alpha d) \cong T(\beta) + \alpha \left[\frac{\partial T(\beta)}{\partial \beta}\right]^T d :$$

$$I(\beta + \alpha d) = \|\beta + \alpha d - \beta^r\|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \left( T(\beta) + \alpha \left[\frac{\partial T(\beta)}{\partial \beta}\right] d - T^* \right)^T \left( T(\beta) + \alpha \left[\frac{\partial T(\beta)}{\partial \beta}\right] d - T^* \right) dt . \quad (10)$$

Скалярную величину  $\alpha$  найдем минимизацией  $I(\beta + \alpha d)$ , решив уравнение  $\frac{\partial I(\beta + \alpha d)}{\partial \alpha} = 0$ :

$$\alpha = - \frac{d^T \{ \partial L / \partial \beta \}}{d^T \left( \int_0^t \left[\frac{\partial T}{\partial \beta}\right]^T \left[\frac{\partial T}{\partial \beta}\right] dt + \gamma \right) d} . \quad (11)$$

Параметр  $\beta$  обновляется по следующей формуле:

$$\beta^{(i+1)} = \beta^{(i)} + \alpha d^{(i)} , \quad (12)$$

где  $i$  – номер итерации.

Направление поиска  $d$  на следующем шаге определяется как линейная комбинация направления наискорейшего спуска на данном шаге и направления спуска на предыдущем шаге, т.е.

$$d^{(i+1)} = - \left\{ \frac{\partial I}{\partial \beta} \right\}^{(i+1)} + \varphi d^{(i)} . \quad (13)$$

Веса  $\varphi$  по методу Флетчера – Ривса выбираются таким образом, чтобы сделать направление наискорейшего спуска на данном шаге и направление спуска на предыдущем шаге сопряженными, что и определяет сходимость квадратичной функции за  $(n+1)$  шаг. Математически это выглядит так:

$$\varphi = \frac{\left(\left\{\frac{\partial I}{\partial \beta}\right\}^{(i+1)}, \left\{\frac{\partial I}{\partial \beta}\right\}^{(i+1)}\right)}{\left(\left\{\frac{\partial I}{\partial \beta}\right\}^{(i)}, \left\{\frac{\partial I}{\partial \beta}\right\}^{(i)}\right)}. \quad (14)$$

*Алгоритм решения:*

1. Задать  $\frac{\partial I}{\partial \beta} = \alpha \|\beta^{(0)} - \beta^r\|$ .

2. Вычисляя температуру  $U^n$  и функции чувствительности  $\frac{\partial T^n}{\partial \beta}$  на каждом  $n$ -м временном слое, добавлять в  $\frac{\partial I}{\partial \beta}$  слагаемое  $\int_0^t \left(Q \frac{\partial T}{\partial \beta}\right)^T (QT - T^*) dt$  и вычислить  $\int_0^t \left[\frac{\partial T}{\partial \beta}\right]^T \left[\frac{\partial T}{\partial \beta}\right] dt$  по численной схеме Симпсона.

3. Задать  $d^{(0)} = -\left\{\frac{\partial I}{\partial \beta}\right\}$ .

4. Повторять до сходимости:

- вычислить  $\alpha$  по формуле (11);
- обновить  $\beta$  по формуле (12);
- повторить пункт 2;
- вычислить  $\varphi$  по формуле (13);
- обновить  $d$  по формуле (12).

В случае, если сходимость не наступила, т.е. уровень невязки остался достаточно большим, повторяем алгоритм с самого начала, т.е. с пункта 1, но в качестве  $\beta^{(0)}$  берем текущее найденное значение.

*Решение специальной обратной задачи теплопроводности.* Рассмотрим модифицированную обратную задачу, в которой коэффициент теплопроводности  $\beta$  будем считать известной функцией, зависящей от координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  в пределах объема стены. Направление и расположение координатных осей определено выше. Геометрию расположения слоев определяет технология строительства и разрабатываемый проект здания.

Необходимо определить величину теплоизолирующего слоя с учетом режима эксплуатации здания, климатических условий, инженерных коммуникаций, закладываемых в проект, и других ограничений.



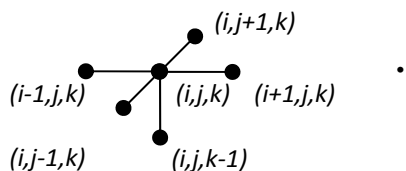
Из физических соображений следует, что приведенный в формуле (5) оператор  $A$  – преобразования температурного поля  $T$ , определяемый условиями (1) – (4), где  $F$  – результат преобразования по формулам (1) – (4) (теоретическое поле температур), является антимонотонным, если его рассматривать как функцию от параметра  $d$  – мощности теплоизолирующего слоя.

Граничные условия (3), (4) для уравнения (1), где границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  оговорены ранее, определяются желаемым температурным режимом в здании и температурой наружного воздуха. При этих условиях решается численным методом прямая задача теплопроводности (ПЗТ) с учетом всех условий протекания теплового процесса. Невязка  $F - T_0$ , рассчитанная для внутренних точек офисного или жилого помещения, имеет определенный знак (здесь  $T_0$  – планируемая внутренняя температура).

Начиная с некоторого значения  $d_0$ , проводим решение ПЗТ, из сравнения с вычисленным значением  $F$  определяем поправку слоя, т. е. задаем уточненное значение  $d_1$ , и так далее до удовлетворительного значения невязки.

*Решение прямой двухмерной задачи теплопроводности с использованием неявного метода переменных направлений (неявная разностная схема.* Построим в области  $D = \{(x,y,t) \mid 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < t \leq t_{max}\}$  равномерную прямоугольную сетку с шагом  $h$  в направлении  $x$ ,  $y$  и с шагом  $\tau$  – в направлении  $t$ . Обозначим узлы сетки  $(x_i, y_j, t_k)$ , а приближенные значения функции  $u(x,y,t)$  в этих узлах –  $u_{i,j}^k$ . Тогда  $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, n_x, n_x = a/h$ ;  $y_j = jh, j = 0, 1, \dots, n_y, n_y = b/h$ ;  $t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, m, \tau = t_{max}/m$ .

Аппроксимируем уравнение теплопроводности на шеститочечном шаблоне:



Воспользуемся продольно-поперечной схемой (неявный метод переменных направлений) [12].

Переход от слоя  $k-1$  к слою  $k$  совершается в два этапа с шагами  $0.5\tau$ : сначала решается уравнение, неявное по направлению  $x$  и явное по

направлению  $y$ , переход со слоя  $k-1$  на слой  $k-1/2$ , затем уравнение явное по направлению  $x$  и неявное по направлению  $y$ , переход со слоя  $k-1/2$  на слой  $k$ .

Схема, неявная по направлению  $x$  (по простиранию) и явная по направлению  $y$  (вглубь стены).

Алгоритм в этом случае следующий: последовательно для всех  $j$  по явной разностной схеме определяется значение поля температур

$$u(x_i, y_j, t_{k-1/2}) \approx \underline{u}_{i,j+1}^{k-1/2};$$

$$\begin{cases} \underline{u}_{i,j+1}^{k-1/2} = \lambda_{i,j+1} (u_{i+1,j+1}^{k-1} + u_{i-1,j+1}^{k-1} + u_{i,j+2}^{k-1} + u_{i,j}^{k-1} - 4u_{i,j+1}^{k-1}) + u_{i,j+1}^{k-1}, & i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 2}, \\ \underline{u}_{i, N_y}^{k-1/2} = T_2, & i = \overline{1, N_x - 1}. \end{cases}$$

Далее это значение используется в неявной схеме при решении системы  $N_x + 1$  линейных уравнений с  $N_x + 1$  переменными:

$$\begin{cases} u_{0,j}^{k-1/2} = T_2, \\ \lambda_{i,j} u_{i-1,j}^{k-1/2} - (1 + 4\lambda_{i,j}) u_{i,j}^{k-1/2} + \lambda_{i,j} u_{i+1,j}^{k-1/2} = -\lambda_{i,j} u_{i,j-1}^{k-1/2} - u_{i,j}^{k-1} - \lambda_{i,j} \underline{u}_{i,j+1}^{k-1/2}, & i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, \\ u_{N_x,j}^{k-1/2} = T_2. \end{cases}$$

Схема, неявная по направлению  $y$  и явная по направлению  $x$ :

$$\begin{cases} u_{i,0}^k = T(x_i, t_k), \\ \lambda_{i,j} u_{i,j-1}^k - (1 + 4\lambda_{i,j}) u_{i,j}^k + \lambda_{i,j} u_{i,j+1}^k = -\lambda_{i,j} u_{i-1,j}^k - u_{i,j}^{k-1/2} - \lambda_{i,j} \overline{u}_{i+1,j}^k, & i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, \\ u_{i, N_y}^k = T_2, \\ \overline{u}_{i+1,j}^{-k} = \lambda_{i+1,j} (u_{i,j}^{k-1/2} + u_{i+1,j-1}^{k-1/2} + u_{i+1,j+1}^{k-1/2} + u_{i+2,j}^{k-1/2} - 4u_{i+1,j}^{k-1/2}) + u_{i+1,j}^{k-1/2}, & i = \overline{1, N_x - 2}, j = \overline{1, N_y - 1}, \\ \overline{u}_{N_x,j}^{-k} = T_2, & j = \overline{1, N_y - 1}. \end{cases}$$

Здесь  $\lambda_{i,j} = \frac{\beta(x_i, y_j) \tau}{\rho(x_i, y_j) C(x_i, y_j) h^2}$ . В выражении  $\lambda_{i,j}$  учтена мощность слоя

теплоизолятора  $d_0$ .

Продольно-поперечная схема безусловно устойчива (при любых  $\tau$  и  $h$ ) и имеет точность  $O(\tau^2 + h^2)$ .

Для перехода с  $k-1/2$ -го слоя на  $k$ -й всего решается  $N_x - 1$  таких систем.

Значения  $u_{i,j}^k$  находим из полученной неявной схемы, решая систему из  $N + 1$  уравнения с  $N + 1$  неизвестным (здесь  $N = N_x$  или  $N_y$ ). Матрица системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & 0 \\ \lambda_1 & -(1+4\lambda_1) & \lambda_1 & & & & & & & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -(1+4\lambda_2) & \lambda_2 & & & & & & & 0 \\ & & & \dots & & & & & & & \dots \\ & & & & & 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & & & & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & & \lambda_{N-2} & -(1+4\lambda_{N-2}) & \lambda_{N-2} & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 & \lambda_{N-1} & -(1+4\lambda_{N-1}) & \lambda_{N-1} & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Правая часть системы в случае схемы, явной по направлению  $x$ :

$$b = \begin{pmatrix} T_2 \\ -\lambda_{1,j} u_{1,j-1}^{k-1/2} - u_{1,j}^{k-1} - \lambda_{1,j} u_{1,j+1}^{k-1/2} \\ -\lambda_{2,j} u_{2,j-1}^{k-1/2} - u_{2,j}^{k-1} - \lambda_{2,j} u_{2,j+1}^{k-1/2} \\ \dots \\ T_1 \\ T_1 \\ T_1 \\ \dots \\ -\lambda_{N_x-1,j} u_{N_x-1,j-1}^{k-1/2} - u_{N_x-1,j}^{k-1} - \lambda_{N_x-1,j} u_{N_x-1,j+1}^{k-1/2} \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

Правая часть системы в случае схемы, неявной по направлению  $y$ :

$$b = \begin{pmatrix} T_2 \\ -\lambda_{i,1} u_{i-1,1}^k - u_{i,1}^{k-1/2} - \lambda_{i,1} u_{i+1,1}^{-k} \\ -\lambda_{i,2} u_{i-1,2}^k - u_{i,2}^{k-1/2} - \lambda_{i,2} u_{i+1,2}^{-k} \\ \dots \\ T_1 \\ T_1 \\ T_1 \\ \dots \\ -\lambda_{i,N_y-1} u_{i-1,N_y-1}^k - u_{i,N_y-1}^{k-1/2} - \lambda_{i,N_y-1} u_{i+1,N_y-1}^{-k} \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

Система имеет трехдиагональную матрицу, и её рациональней всего решать методом прогонки или методом Зейделя.

Сравнивая вычисленные изотермы, уточняем значение  $d_1$  и так далее.

### Список литературы

1. *Завадский В.Ф., Корнев Е.С.* Физико-технические свойства стеновых изделий из бетонов различной плотности // Известия вузов. Строительство. – 2006. – № 10. – С. 13 – 15.
2. Корнев Е.С. Теплоизоляционно-конструктивные двухслойные стеновые блоки // Техника и технология производства теплоизоляционных материалов из минерального сырья. Бийск (Белокуриха), 2007. – С. 50 – 52.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, 288 с.
4. *Алифанов О.М., Вабищевич П.Н., Михайлов В.В., Ненарокомов А.В., Полежаев Ю.В., Резник С.В.* Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем. М.: Логос. 2001.
5. *Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч.* Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир. 1989.
6. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
7. Лаврентьев М. М. Обратные задачи и специальные операторные уравнения первого рода // Международный конгресс математиков в Ницце. М.: Наука, 1972. С. 130 – 136.
8. Комиссаров В.В., Комиссарова Н.В., Чащин О.Н. Алгоритм регуляризации обратных коэффициентных задач для параболических уравнений // Материалы международной конференции «ТИХОНОВ-100», 2006, вып. № 1, с.266 – 267.
9. *Комиссаров В.В., Комиссарова Н.В., Чащин О.Н.* Численное решение регуляризованных обратных задач для параболических уравнений // Вестник СГГА. – 2006. Вып. 11. С. 98 – 102.
10. *Бойко О. А., Зеркаль С.М., Иткина Н.Б.* Применение методов планирования эксперимента при решении обратных коэффициентных задач теплопереноса: препринт № 125 // Институт математики СО РАН. Новосибирск: ИМ СО РАН им. С.Л. Соболева, 2004. 20 с.
11. *Haber E., Ascher U.M., Oldenburg D.* On optimization techniques for solving nonlinear inverse problems // Inverse Problems. – 2000. – V.16, № 5. – p. 1263 – 1280.
12. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.